Aula 05:
Algoritmo Simplex (2)

Programação Linear e Inteira

Túlio Toffolo

www.toffolo.com.br

Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto

Algoritmo Simplex (2)

Algoritmo Simplex (2)

Exercício

1. Resolva, usando o método Simplex (passo-a-passo):

$$
\begin{array}{rrrrr}
min. & 300x_1 + & 280x_2 & & \\
s.a. & 70x_1 + & 50x_2 & \geq & 350 \\
 & 50x_1 + & 80x_2 & \geq & 400 \\
 & x_1 & & \geq & 2 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Exercício

1. Resolva, usando o método Simplex (passo-a-passo):

$$
\begin{array}{rrrl}
min. & 300x_1 + & 280x_2 & \\
s.a. & 70x_1 + & 50x_2 & \geq 350 \\
 & 50x_1 + & 80x_2 & \geq 400 \\
 & x_1 & & \geq 2 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

O Algoritmo Simplex

Passo 1 Converta o PL para a **Forma Padrão**.

Passo 2 Obtenha uma **Solução Básica Factível** (se possível) da Forma Padrão.

Passo 3 **Teste de Otimalidade**: Determine se a Solução Básica é Ótima. Se Ótima Pare.

Passo 4 Caso não seja ótima -**Mudança de Base**: determine:

- qual variável não básica irá entrar na base, com o intuito de melhorar a função objetivo;
- qual variável básica irá sair da base.

Passo 5 Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

Exercício 2

Passo 1: colocar na forma padrão

$$
\begin{array}{rl}
min. & 300x_1 + 280x_2 \\
s.a. & 70x_1 + 50x_2 - s_1 = 350 \\
& 50x_1 + 80x_2 - s_2 = 400 \\
& x_1 - s_3 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{array}
$$

Exercício 2

Passo 2: encontrar uma SBF (solução básica factível) inicial

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
min. & 300x_1 + & 280x_2 & & & & & \\
s.a. & 70x_1 + & 50x_2 - & s_1 & & & = & 350 \\
 & 50x_1 + & 80x_2 & & - s_2 & & = & 400 \\
 & x_1 & & & & - s_3 & = & 2 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Variáveis de folga na base: $\{s_1, s_2, s_3\}$
Variáveis fora da base: $\{x_1, x_2\}$

Opa... mas esta solução **não é factível**...

Exercício 3

E agora? Como vamos obter uma SBF???

Algoritmo Simplex (2)

Método de Duas Fases

- Alternativa para situações em que obter uma Solução Básica Factível (SBF) não é trivial.
- Consiste em resolver dois PLs distintos:
  - Resolver PL contendo variáveis artificiais para encontrar uma SBF
  - Se uma variável artificial tem valor diferente de zero na solução ótima então o problema original é inviável
  - Resolver o PL original utilizando a SBF obtida como solução inicial

Método de Duas Fases

- Introduzir variáveis artificiais
- Criar função objetivo artificial:

$$z_a = \sum_{i \in I} x_i^a$$

- Variáveis básicas iniciais: variáveis de folga associadas às restrições de menor e igual e variáveis artificiais
- Objetivo da primeira fase: minimizar a função objetivo artificial
- Caminhar de SBF em SBF até alcançar uma SBF do problema original (em que todas as variáveis artificiais são nulas).

Método de Duas Fases

- A partir de uma SBF do problema original P, gerar SBFs cada vez melhores até se atingir a solução ótima.
  - Ou seja: aplicar o Simplex padrão no problema original P utilizando a SBF obtida na FASE 1.

Algoritmo Simplex (2)

Voltando ao exercício anterior...

Resolva, usando o método Simplex (passo-a-passo):

$$
\begin{array}{rrrl}
min. & 300x_1 + 280x_2 & & \\
s.a. & 70x_1 + 50x_2 & \geq & 3500 \\
 & 50x_1 + 80x_2 & \geq & 4000 \\
 & x_1 & \geq & 2 \\
 & x_1, \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Voltando ao exercício anterior...

Resolva, usando o método Simplex (passo-a-passo):

$$\begin{array}{rrrrl} min. & 300x_1 + & 280x_2 & & \\ s.a. & 7x_1 + & 5x_2 & \geq & 35 \\ & 5x_1 + & 8x_2 & \geq & 40 \\ & x_1 & & \geq & 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

O Algoritmo Simplex

- Passo 1 Converta o PL para a **Forma Padrão**.
- Passo 2 Obtenha uma **Solução Básica Factível** (se possível) da Forma Padrão.
- Passo 3 **Teste de Otimalidade**: Determine se a Solução Básica é Ótima. Se Ótima Pare.
- Passo 4 Caso não seja ótima -**Mudança de Base**: determine:
  - qual variável não básica irá entrar na base, com o intuito de melhorar a função objetivo;
  - qual variável básica irá sair da base.
- Passo 5 Utilize as operações elementares para computar a **Nova Solução Básica** e volte para o Passo 3.

Passo 1

Passo 1: colocar na forma padrão

$$\begin{array}{rllllll}
min. & 300x_1 + 280x_2 & & & & & \\
s.a. & 7x_1 + & 5x_2 - s_1 & & & = & 35 \\
 & 5x_1 + & 8x_2 & - s_2 & & = & 40 \\
 & x_1 & & & - s_3 & = & 2
\end{array}$$

Passo 2

Passo 2: obter uma Solução Básica Factível (SBF) inicial

- Infelizmente a obtenção de uma solução inicial não é trivial
- Motivo: as variáveis de folga (que aparecem em apenas uma restrição) não permitem uma SBF trivial (exemplo: $s_1 = -35$ não é possível uma vez que $s_1 \geq 0$)
- O que fazer?
  - Uma opção é aplicar o **Método de Duas Fases**

Método de Duas Fases

- Geramos um novo problema: adicionamos variáveis artificiais para que seja trivial gerar uma Solução Básica Factível (SBF).
- Em seguida, resolvemos o problema cujo objetivo é minimizar o valor das variáveis artificiais, ou seja: desaparecer com elas.

$$\begin{array}{llllllllll}
min. & & & & & a_1 + a_2 + a_3 & & \\
s.a. & 7x_1 + 5x_2 - s_1 & & & + a_1 & & & = 35 \\
 & 5x_1 + 8x_2 & - s_2 & & & + a_2 & & = 40 \\
 & x_1 & & - s_3 & & & + a_3 & = 2
\end{array}$$

Passos 2.1 e 2.2

Passo 2.1 (Método de Duas Fases): Colocar na forma padrão

- Não é necessário pois o problema já está na forma padrão.

Passo 2.2 (Método de Duas Fases): Encontrar uma SBF inicial

- Trivial: VB $= \{a_1, a_2, a_3\}$, i.e. $a_1 = 35$, $a_2 = 40$ e $a_3 = 2$.

$$
\begin{array}{llllllllll}
min. & & & & & & +a_1 & +a_2 & +a_3 & \\
s.a. & 7x_1 + & 5x_2 & -s_1 & & & +a_1 & & & =35 \\
 & 5x_1 + & 8x_2 & & -s_2 & & & +a_2 & & =40 \\
 & x_1 & & & & -s_3 & & & +a_3 & = 2
\end{array}
$$

- Vamos montar o *tableau*:
  - a_1, a_2 e a_3 devem ter coeficiente 0 na função objetivo:
  - Logo: $L_0 \leftarrow L_0 - L_1 - L_2 - L_3$

Passos 2.3

Passo 2.3 (Método de Duas Fases): Teste de otimalidade

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	-77	-13	-13	1	1	1			
L_1 :	$a_1 =$	35	7	5	-1			1		
L_2 :	$a_2 =$	40	5	8		-1			1	
L_3 :	$a_3 =$	2	1				-1			1

Solução é ótima?

- Não, pois há variáveis com **custo reduzido** negativo (e trata-se de um problema de minimização):

Passo 2.4

Passo 2.4 (Método de Duas Fases): Mudança de Base

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	-77	-13	-13	1	1	1			
L_1 :	$a_1 =$	35	7	5	-1			1		
L_2 :	$a_2 =$	40	5	8		-1			1	
L_3 :	$a_3 =$	2	1				-1			1

- Quem entra na base? x_1
- Quem sairá da base? a_3, pois a linha L_3 será a linha pivô (é a linha que mais limita o valor de x_1)

Passos 2.5

Passo 2.5 (Método de Duas Fases): Computar Nova Solução Básica

- Temos que atualizar o *tableau*

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	-77	-13	-13	1	1	1			
L_1 :	$a_1 =$	35	7	5	-1			1		
L_2 :	$a_2 =$	40	5	8		-1			1	
L_3 :	$a_3 = x_1 =$	2	1				-1			1

- x_1 entra base na linha pivô L_3 (linha que mais limita seu valor), logo:
  - $L_3 \leftarrow L_3$ (x_1 já tinha coeficiente 1), logo: $x_1 = 2$
- $L_0 \leftarrow L_0 + 13L_3$
- $L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3$
- $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3$

Passos 2.5

Passo 2.5 (Método de Duas Fases): Computar Nova Solução Básica

- Nova solução obtida:

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	-51		-13	1	1	-12			13
L_1 :	$a_1 =$	21		5	-1		7	1		-7
L_2 :	$a_2 =$	30		8		-1	5		1	-5
L_3 :	$x_1 =$	2	1				-1			1

- $x_1 = 2, x_2 = 0, s_1 = s_2 = s_3 0, a_1 = 21, a_2 = 30, a_3 = 0$
- Agora voltamos ao passo 2.3...

Passos 2.3

Passo 2.3 (Método de Duas Fases): Teste de otimalidade

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	-51		-13	1	1	-12			13
L_1 :	$a_1 =$	21		5	-1		7	1		-7
L_2 :	$a_2 =$	30		8		-1	5		1	-5
L_3 :	$x_1 =$	2	1				-1			1

A solução é ótima?

- Não, pois ainda há variáveis com **custo reduzido negativo** (e trata-se de um problema de minimização):

Passos 2.4

Passo 2.4 (Método de Duas Fases): Mudança de Base

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	-51		-13	1	1	-12			13
L_1 :	$a_1 =$	21		5	-1		7	1		-7
L_2 :	$a_2 =$	30		8		-1	5		1	-5
L_3 :	$x_1 =$	2	1				-1			1

- Quem entra na base? x_2
- Quem sairá da base? a_2, pois a linha L_2 será a linha pivô (é a linha que mais limita o valor de x_2)

Passos 2.5

Passo 2.5 (Método de Duas Fases): Computar Nova Solução Básica

- Temos que atualizar o *tableau*

		x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
$L_0: \quad z =$	-51		-13	1	1	-12			13
$L_1: \quad a_1 =$	21		5	-1		7	1		-7
$L_2: \quad a_2 =$	30		8		-1	5		1	-5
$L_3: \quad x_1 =$	2	1				-1			1

- x_2 entra base na linha pivô L_2 (linha que mais limita seu valor), logo:
  - $L_2 \leftarrow L_2 \div 8$, e portanto $x_2 = {}^{30}/_{8}$

Passos 2.5

Passo 2.5 (Método de Duas Fases): Computar Nova Solução Básica

- Temos que atualizar o *tableau*

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	-51		-13	1	1	-12			13
L_1 :	$a_1 =$	21		5	-1		7	1		-7
L_2 :	$x_2 =$	$30/8$		1		$-1/8$	$5/8$		$1/8$	$-5/8$
L_3 :	$x_1 =$	2	1				-1			1

- $L_0 \leftarrow L_0 + 13L_2$
- $L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$

Passo 2.5

Passo 2.5 (Método de Duas Fases): Computar Nova Solução Básica

- Nova solução obtida:

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
$L_0:$	$z =$	$-18/8$			1	$-5/8$	$-31/8$		$13/8$	$39/8$
$L_1:$	$a_1 =$	$18/8$			-1	$5/8$	$31/8$	1	$-5/8$	$-31/8$
$L_2:$	$x_2 =$	$30/8$		1		$-1/8$	$5/8$		$1/8$	$-5/8$
$L_3:$	$x_1 =$	2	1				-1			1

- $x_1 = 2, x_2 = 30/8, s_1 = s_2 = 0, a_1 = 18/8, a_2 = 30, a_3 = 0$
- Agora repetimos o 'loop' e voltamos ao passo 2.3...

Passo 2.3

Passo 2.3 (Método de Duas Fases): Teste de otimalidade

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	$-18/8$			1	$-5/8$	$-31/8$		$13/8$	$39/8$
L_1 :	$a_1 =$	$18/8$			-1	$5/8$	$31/8$	1	$-5/8$	$-31/8$
L_2 :	$x_2 =$	$30/8$		1		$-1/8$	$5/8$		$1/8$	$-5/8$
L_3 :	$x_1 =$	2	1				-1			1

Solução é ótima?

- Ainda não, pois há variáveis com **custo reduzido** **negativo** (e trata-se de um problema de minimização):

Passos 2.4

Passo 2.4 (Método de Duas Fases): Mudança de Base

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	$-18/8$			1	$-5/8$	$-31/8$		$13/8$	$39/8$
L_1 :	$a_1 =$	$18/8$			-1	$5/8$	$31/8$	1	$-5/8$	$-31/8$
L_2 :	$x_2 =$	$30/8$		1		$-1/8$	$5/8$		$1/8$	$-5/8$
L_3 :	$x_1 =$	2	1				-1			1

- Quem entra na base? s_3
- Quem sairá da base? a_1, pois a linha L_1 será a linha pivô (é a linha que mais limita o valor de s_3)

Passos 2.5

Passo 2.5 (Método de Duas Fases): Computar Nova Solução Básica

- Temos que atualizar o *tableau*

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	$-18/8$			1	$-5/8$	$-31/8$		$13/8$	$39/8$
L_1 :	$a_1 =$	$18/8$			-1	$5/8$	$31/8$	1	$-5/8$	$-31/8$
L_2 :	$x_2 =$	$30/8$		1		$-1/8$	$5/8$		$1/8$	$-5/8$
L_3 :	$x_1 =$	2	1				-1			1

- s_3 entra base na linha pivô L_1 (linha que mais limita seu valor), logo:
  - $L_1 \leftarrow L_1 \times 8/31$, e portanto $s_3 = 18/31$

Passos 2.5

Passo 2.5 (Método de Duas Fases): Computar Nova Solução Básica

- Temos que atualizar o *tableau*

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	$-^{18}/_8$			1	$-^5/_8$	$-^{31}/_8$		$^{13}/_8$	$^{39}/_8$
L_1 :	s_3	$^{18}/_{31}$			$-^8/_{31}$	$^5/_{31}$	1	$^8/_{31}$	$-^5/_{31}$	-1
L_2 :	$x_2 =$	$^{30}/_8$		1		$-^1/_8$	$^5/_8$		$^1/_8$	$-^5/_8$
L_3 :	$x_1 =$	2	1				-1			1

- $L_0 \leftarrow L_0 + 31L_1 \div 8$
- $L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \div 8$
- $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

Passos 2.5

Passo 2.5 (Método de Duas Fases): Computar Nova Solução Básica

- Nova solução obtida:

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	0						1	1	1
L_1 :	$s_3 =$	$^{18}/_{31}$			$-^{8}/_{31}$	$^{5}/_{31}$	1	$^{8}/_{31}$	$-^{5}/_{31}$	-1
L_2 :	$x_2 =$	$^{105}/_{31}$		1	$^{5}/_{31}$	$-^{7}/_{31}$		$-^{5}/_{31}$	$^{7}/_{31}$	
L_3 :	$x_1 =$	$^{80}/_{31}$	1		$-^{8}/_{31}$	$^{5}/_{31}$		$^{8}/_{31}$	$-^{5}/_{31}$	

- $x_1 = {}^{80}/_{31}$, $x_2 = {}^{105}/_{31}$, $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = {}^{18}/_{31}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$
- Agora repetimos o 'loop' e voltamos ao passo 2.3...

Passo 2.3

Passo 2.3 (Método de Duas Fases): Teste de otimalidade

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_2	a_3
L_0 :	$z =$	0						1	1	1
L_1 :	$s_3 =$	$18/31$			$-8/31$	$5/31$	1	$8/31$	$-5/31$	-1
L_2 :	$x_2 =$	$105/31$		1	$5/31$	$-7/31$		$-5/31$	$7/31$	
L_3 :	$x_1 =$	$80/31$	1		$-8/31$	$5/31$		$8/31$	$-5/31$	

- A solução agora é ótima (considerando o problema artificial da primeira fase) e, portanto, encontramos uma SBF inicial
- $x_1 = 80/31$, $x_2 = 105/31$ e $s_3 = 18/31$

Passo 3

Como encontramos uma **SBF**, **removemos as variáveis artificiais** do problema e voltamos à função objetivo do problema original:

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
$L_0:$	$z =$		300	280			
$L_1:$	$s_3 =$	$^{18}/_{31}$			$-^{8}/_{31}$	$^{5}/_{31}$	1
$L_2:$	$x_2 =$	$^{105}/_{31}$		1	$^{5}/_{31}$	$-^{7}/_{31}$	
$L_3:$	$x_1 =$	$^{80}/_{31}$	1		$-^{8}/_{31}$	$^{5}/_{31}$	

Mas o *tableau* acima ainda não está atualizado.

- Devemos atualizar a linha L_0 para que as variáveis básicas (x_1, x_2 e s_3) tenham coeficiente zero:
  - $L_0 \leftarrow L_0 - 300L_3 - 280L_2$

Passo 3

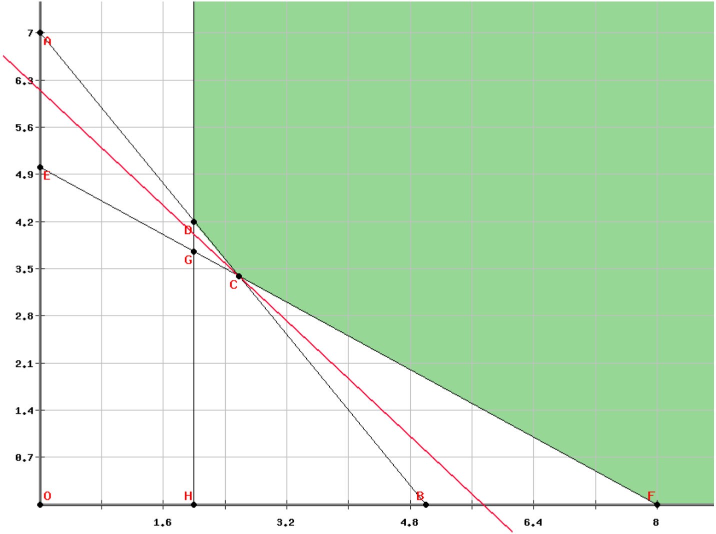
Passo 2.3 (Método de Duas Fases): Teste de otimalidade

			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
L_0 :	$z =$	$-53400/31$			$1000/31$	$460/31$	
L_1 :	$s_3 =$	$18/31$			$-8/31$	$5/31$	1
L_2 :	$x_2 =$	$105/31$		1	$5/31$	$-7/31$	
L_3 :	$x_1 =$	$80/31$	1		$-8/31$	$5/31$	

A **solução é ótima**?

- **Sim!!!** $z = 53400/31$, $x_1 = 80/31$ e $x_2 = 105/31$

Solução gráfica



Perguntas?